

Exercice 2 - ECRICOME 2011**PARTIE I. Un jeu en ligne.**

1. Les positionnement sont déterminés par l'ensembles (sans ordre) des 3 positions distinctes parmi 9. il y en a donc $\binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 3 \cdot 4 \cdot 7 = 84$

2. (H) est formé de 3 positionnements : ligne 1, 2 ou 3, les positionnements étant équiprobables (on le suppose) donc $P(H) = \frac{3}{84}$

(V) est formé de 3 positionnements : colonne A , B ou C donc $P(V) = \frac{3}{84}$

(D) comporte es deux diagonales descendants et ascendantes. Donc $P(D) = \frac{2}{84}$

3. (H, V, D, N) étant un système complet d'événements,

$$\begin{aligned} P(N) &= 1 - P(V) - P(H) - P(D) \\ &= 1 - \frac{8}{84} = 1 - \frac{2}{21} \\ &= \frac{19}{21} \simeq 0.9048 \end{aligned}$$

4. La société peut s'attendre à 10 000 relances par jour de ce jeu.

(a) Pour chaque entier naturel i non nul. on note Z_i le gain de la société à la $i^{\text{ème}}$ relance.

Lors de la $i^{\text{ème}}$ relance, la société peut gagner 2 euros (la mise) si N ou en perdre 18 sinon.

Donc $Z_i(\Omega) = \{2, -18\}$. avec $P(Z_i = 2) = P(N) = \frac{19}{21}$ et $P(Z_i = -18) = \frac{2}{21}$, donc

$$\begin{aligned} E(Z_i) &= 2 \frac{19}{21} - 18 \frac{2}{21} \\ &= \frac{38 - 36}{21} = \frac{2}{21} \end{aligned}$$

Conclusion : $E(Z_i) = \frac{2}{21} \simeq 0,1$

(b) le gain total est la somme des gains à chaque relance donc $Z = \sum Z_i$ et $E(Z) = 10000 \cdot \frac{2}{21} \simeq 1000$

Conclusion : $\boxed{\text{En moyenne, la société gagnera à peu près 1000€ par jour}}$, mais elle peut espérer beaucoup plus !

PARTIE II. Cas de joueurs invétérés.

1. Un Joueur décide de jouer 100 parties consécutives que l'on suppose indépendantes.

(a) X est le nombre de parties gagnées en 100 parties indépendantes, la probabilité de gagné chacune étant de $\frac{2}{21}$

Conclusion : $X \leftrightarrow \mathcal{B}\left(100, \frac{2}{21}\right)$ (loi binomiale)

(b) on a donc $E(X) = \frac{200}{21}$ et $V(X) = \frac{2}{21} \frac{19}{21} 100$ (formules du cours)

(c) En 100 parties, X sont gagnées (gain $18X$) et $100 - X$ perdues (perte $2(100 - X)$)

La perte totale est donc $T = 2(100 - X) - 18X = 200 - 20X$

(On peut compter différemment : il mise 200 et reçoit 20 par partie gagnée donc $20X$)

Conclusion : $T = 200 - 20X$

2. Avec n parties au lieu de 100, l'événement $U =$ "gagner au moins une partie" est l'événement contraire de $(X = 0)$

$$P(X = 0) = \binom{n}{0} \left(\frac{2}{21}\right)^0 \left(\frac{19}{21}\right)^n$$

Donc

$$\begin{aligned} P(U) &= 1 - \left(\frac{19}{21}\right)^n \geq 0.5 \\ &\iff \left(\frac{19}{21}\right)^n \leq \frac{1}{2} \\ &\iff n \ln\left(\frac{19}{21}\right) \leq -\ln(2) \quad (\text{attention } \ln\left(\frac{19}{21}\right) < 0) \\ &\iff n \geq \frac{-\ln(2)}{\ln\left(\frac{19}{21}\right)} \simeq \frac{0,7}{0,1} \end{aligned}$$

Conclusion : il faut jouer au moins 7 (ou 8) partie pour en gagner au moins une avec une probabilité supérieure à 50%

PARTIE III. Contrôle de la qualité du jeu.

On constate que, parfois, la fonction aléatoire est dérégulée. Dans ce cas, elle place le premier jeton dans la case $(A, 1)$, les deux autres étant placés au hasard dans les cases restantes. On note Δ l'événement "la fonction aléatoire est dérégulée" et on pose $P(\Delta) = x$ avec $x \in]0, 1[$.

1. Sachant Δ , les positions sont déterminées par la seule combinaison des 2 autres positions parmi les 8 restantes.

Il y a donc $\binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 28$ positionnements possibles et équiprobables.

(H) est à présent réduit à la ligne 1, V à la colonne A et D à la diagonale descendante.

Conclusion : $P_{\Delta}(H) = P_{\Delta}(V) = P_{\Delta}(D) = \frac{1}{28}$

2. On a donc $P_{\Delta}(N) = 1 - \frac{3}{28} = \frac{25}{28}$

Sachant $\bar{\Delta}$, l'expérience se fait dans les conditions de la partie I et les probabilités sont donc celle

de la partie I : $P_{\bar{\Delta}}(N) = \frac{19}{21}$

$(\Delta, \bar{\Delta})$ est un système complet d'événement donc

$$\begin{aligned} P(N) &= P_{\bar{\Delta}}(N) \cdot P(\bar{\Delta}) + P_{\Delta}(N) \cdot P(\Delta) \\ &= x \frac{25}{28} + (1 - x) \frac{19}{21} \\ &= x \frac{25}{4 \cdot 7} + (1 - x) \frac{19}{3 \cdot 7} \\ &= \frac{25 \cdot 3 - 19 \cdot 4}{3 \cdot 4 \cdot 7} x + \frac{19}{21} \\ &= -\frac{x}{84} + \frac{19}{21} \end{aligned}$$

Conclusion : la probabilité les jetons ne soient pas alignés est égal à $P(N) = -\frac{x}{84} + \frac{19}{21}$

3. Soit G la variable aléatoire égale au gain réalisé par la société de jeu lors d'une partie jouée.

On a donc $P(G = 2) = P(N)$ et $P(G = -18) = P(\bar{N}) = 1 - P(N)$

Donc

$$\begin{aligned} E(G) &= 2 \left(-\frac{x}{84} + \frac{19}{21} \right) - 18 \left(1 + \frac{x}{84} - \frac{19}{21} \right) \\ &= -\frac{20}{84}x + \frac{2}{21} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} E(G) > 0 &\iff -\frac{20}{84}x + \frac{2}{21} > 0 \\ &\iff x < \frac{2 \cdot 84}{21 \cdot 20} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Conclusion : le gain moyen reste positif tant que $x < \frac{2}{5}$

4. On joue une partie. On constate que les jetons sont alignés.

la fonction aléatoire a été dérégulée si Δ

On cherche donc $P_{\bar{N}}(\Delta)$ par la formule de Bayes :

$$\begin{aligned} P_{\bar{N}}(\Delta) &= \frac{P(\Delta \cap \bar{N})}{P(\bar{N})} \\ &= \frac{P(\Delta) P_{\Delta}(\bar{N})}{P(\bar{N})} \\ &= \frac{x \cdot \frac{3}{28}}{1 - \left(-\frac{x}{84} + \frac{19}{21} \right)} \\ &= \frac{x \cdot \frac{3}{28}}{\frac{2}{21} + \frac{x}{84}} = \frac{9x}{x + 8} \end{aligned}$$

Conclusion : Si les jetons sont alignés, la fonction aléatoire a été dérégulée avec une probabilité $\frac{9x}{x + 8}$

Exercice 3 - ECRICOME 2004 Dans cet exercice, on étudie l'exponentielle d'une matrice pour une matrice carrée d'ordre 3, puis d'ordre 2.

PARTIE I. Exponentielle d'une matrice carrée d'ordre 3.

Soient A , P et Q les matrices définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Afin d'obtenir l'inverse de P , on peut utiliser Scilab :

```
--> P = [2 1 1 ; -1 2 -1 ; 1 -1 1]
--> inv(P)
```

2. On remarque que $PQ = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = I_3$. Donc P est inversible et $P^{-1} = Q$.

3. On pose $T = PAP^{-1}$.

(a) On a

$$\begin{aligned} T &= P \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b) Donc $T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

et $T^3 = T^2T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

Donc pour tout $n \geq 3$, puis $T^n = T^{n-3}T^3 = 0$ (on peut développer la puissance car $n - 3 \geq 0$)

4. On a alors

$$\forall n \geq 3, \quad A^n = PT^nP^{-1} = 0$$

5. Pour tout réel t , on définit la matrice $E(t)$ par :

$$E(t) = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2$$

où I désigne la matrice unité d'ordre 3.

(a) on simplifie le produit en utilisant que $A^3 = A^4 = 0$

$$\begin{aligned} E(t)E(t') &= \left(I + tA + \frac{t^2}{2}A^2 \right) \left(I + t'A + \frac{t'^2}{2}A^2 \right) \\ &= I + (t + t')A + \left(\frac{t^2}{2} + tt' + \frac{t'^2}{2} \right) A^2 + \left(t\frac{t'^2}{2} + t'\frac{t^2}{2} \right) A^3 + \frac{t^2t'^2}{4}A^4 \\ &= I + (t + t')A + \frac{1}{2}(t + t')^2 A^2 \\ &= E(t + t') \end{aligned}$$

N.B. c'est cette propriété qui est caractéristique de l'exponentielle. ($e^{a+b} = e^a e^b$)

(b) On a pour tout t réel, $E(t)E(-t) = E(t-t) = E(0) = I$

Donc $E(t)$ est inversible et $E(t)^{-1} = E(-t) = I - tA + \frac{t^2}{2}A^2$

(c) On a aussi par une récurrence immédiate que $[E(t)]^n = E(nt) = I + ntA + \frac{(nt)^2}{2}A^2$ pour tout entier naturel n .

PARTIE II. Exponentielle d'une matrice carrée d'ordre 2.

Soient B et D les matrices définies par :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Pour tout entier naturel n non nul, et pour tout réel t , on définit la matrice $E_n(t)$ par :

$$E_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} B^k \text{ que l'on note } E_n(t) = \begin{pmatrix} a_n(t) & c_n(t) \\ b_n(t) & d_n(t) \end{pmatrix}$$

1. Q est inversible car $1 \times (-2) - (-1) \times 1 = -1 \neq 0$ et $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. On pose les calculs et on a bien $Q^{-1}BQ = D$

3. On peut calculer l'inverse de Q puis développer QD^nQ^{-1} ou procéder par récurrence :

- pour $n = 0$: $\begin{pmatrix} 2 - 2^0 & 1 - 2^0 \\ 2^{0+1} - 2 & 2^{0+1} - 1 \end{pmatrix} = I = B^0$

- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $B^n = \begin{pmatrix} 2 - 2^n & 1 - 2^n \\ 2^{n+1} - 2 & 2^{n+1} - 1 \end{pmatrix}$

$$\text{alors } B^{n+1} = B^n B = \begin{pmatrix} 2 - 2^n & 1 - 2^n \\ 2^{n+1} - 2 & 2^{n+1} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2^{n+1} & 1 - 2^{n+1} \\ 2^{n+2} - 2 & -1 + 2^{n+2} \end{pmatrix}$$

- Donc pour tout entier n : $B^n = \begin{pmatrix} 2 - 2^n & 1 - 2^n \\ 2^{n+1} - 2 & 2^{n+1} - 1 \end{pmatrix}$

4. La somme $\sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} B^k$ de matrice se calcule terme à terme. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} (2 - 2^k) = \sum_{k=0}^n \frac{2t^k - (2t)^k}{k!}$$

et de même

$$b_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} (2^{k+1} - 2) = \sum_{k=0}^n \frac{-2t^k + 2(2t)^k}{k!}$$

$$c_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} (1 - 2^k) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k - (2t)^k}{k!}$$

$$d_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} (2^{k+1} - 1) = \sum_{k=0}^n \frac{-t^k + 2(2t)^k}{k!}$$

5. En développant, on fait apparaître des sommes partielles de séries exponentielles :

$$a_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{2t^k - (2t)^k}{k!} = 2 \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} - \sum_{k=0}^n \frac{(2t)^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2e^t - e^{2t}$$

et de même

$$b_n(t) = -2 \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} + 2 \sum_{k=0}^n \frac{(2t)^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -2e^t + 2e^{2t}$$

$$c_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} - \sum_{k=0}^n \frac{(2t)^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^t - e^{2t}$$

$$d_n(t) = -\sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} + 2 \sum_{k=0}^n \frac{(2t)^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -e^t + 2e^{2t}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

6. (a) On a donc bien

$$E(t) = \begin{pmatrix} 2e^t - e^{2t} & e^t - e^{2t} \\ 2e^{2t} - 2e^t & 2e^{2t} - e^t \end{pmatrix}$$

(b) On sépare alors les termes :

$$\begin{aligned} E(t) &= \begin{pmatrix} 2e^t - e^{2t} & e^t - e^{2t} \\ 2e^{2t} - 2e^t & 2e^{2t} - e^t \end{pmatrix} \\ &= e^t \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc $E_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $E_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ conviennent pour $E(t) = e^t E_1 + e^{2t} E_2$

(c) On trouve alors :

$$E_1^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = E_1$$

$$E_2^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = E_2$$

$$E_1 E_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } E_2 E_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) En s'inspirant de la partie précédente on calcule

$$\begin{aligned} E(t) E(-t) &= (e^t E_1 + e^{2t} E_2) (e^{-t} E_1 + e^{-2t} E_2) \\ &= e^{t-t} E_1^2 + e^{t-2t} E_1 E_2 + e^{2t-t} E_2 E_1 + e^{2t-2t} E_2^2 \\ &= E_1 + E_2 \\ &= I \end{aligned}$$

Donc $E(t)$ est inversible et son inverse est $E(-t)$